ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν στη Μαθηματική Μοντελοποίηση πολλών φυσικών, χημικών, βιολογικών φαινομένων και σε ποικίλες θεματικές περιοχές όπως η Δυναμική των Ρευστών, ο Ηλεκτρομαγνητισμός, η Επιστήμη των Υλικών, η Αστροφυσική, η Οικονομία, η Οικονομική Μοντελοποίηση κτλ. Επειδή πολύ συχνά οι εξισώσεις υπό εξέταση είναι τόσο περίπλοκες, ώστε για να βρούμε τη λύση τους σε κλειστή μορφή ή με καθαρά αναλυτικά μέσα (π.χ. με μεθόδους μετασχηματισμών Laplace ή Fourier ή με τη μορφή δυναμοσειράς) είναι είτε αδύνατο είτε ανέφικτο, κανείς πρέπει να αναζητήσει αριθμητική προσέγγιση της άγνωστης αναλυτικής λύσης.

Έτσι αναπτύχθηκαν οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων, μία ιδιαίτερη κατηγορία αριθμητικών τεχνικών για να προσεγγίζουμε τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων έχουν γίνει ευρέως αποδεκτές ως ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία για την αριθμητική προσέγγιση των λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η επιτυχία των Μεθόδων Πεπερασμένων Στοιχείων οφείλεται όχι μόνο στο γεγονός ότι έχουν την ικανότητα να σχετίζονται με περίπλοκες γεωμετρίες του χωρίου και μη δομημένες υποδιαιρέσεις, αλλά και στην ισχυρή μαθηματική θεωρία, η οποία έχει αναπτυχθεί για την ανάλυση των αποδόσεων τους.

Για την αριθμητική επίλυση ενός περίπλοκου προβλήματος, όπως για παράδειγμα το συνοριακό πρόβλημα τιμών για τη διαρμονική εξίσωση, έχουν προταθεί ποικίλες Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων. Για παράδειγμα οι **Προσαρμοσμένες (Conforming) Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων**, οι οποίες απαιτούν η προσεγγιστική λύση να βρίσκεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του χώρου Sobolev $H^2(\Omega)$. Αυτό επιβάλλει τη χρήση C^1 πεπερασμένων στοιχείων (Hermite, Argyris), δηλαδή οι συναρτήσεις βάσης του χώρου πεπερασμένων στοιχείων μαζί με τις πρώτες παραγώγους χρειάζεται να είναι συνεχείς στο κλειστό χωρίο $\overline{\Omega}$. Επειδή η κατασκευή τέτοιων χώρων πεπερασμένων στοιχείων είναι αρκετά δύσκολη όταν έχουμε πολύπλοκη γεωμετρία του χωρίου Ω, τα $H^2(\Omega)$-προσαρμοσμένα (conforming) πεπερασμένα στοιχεία σπάνια χρησιμοποιούνται σε πρακτικούς υπολογισμούς.

Ένας τρόπος για να αποφύγουμε τις απαιτήσεις (κανονικότητας) είναι να χρησιμοποιήσουμε **Μη – Προσαρμοσμένες (Non – Conforming) Μεθόδους**. Αυτές στηρίζονται σε βάση πεπερασμένων στοιχείων συνεχών συναρτήσεων, η οποία δεν ανήκει στο $H^2(\Omega)$ (και συνεπώς αυτές οι συναρτήσεις δε συμπεριλαμβάνονται ούτε στο $C^1(\overline{\Omega})$). Άλλες προσεγγίσεις που αποφεύγουν τη χρήση C^1 πεπερασμένων στοιχείων περιλαμβάνουν τις **Μικτές Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων**. Ωστόσο, αυτές οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων διπλασιάζουν τους βαθμούς ελευθερίας, διότι για να βρούμε την αριθμητική λύση του διαρμονικού προβλήματος

$$\Delta^2 u = f$$

πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \Delta u = g \\ \Delta g = f \end{cases} .$$

Επιπρόσθετα, μία άλλη κατηγορία μεθόδων για την αριθμητική επίλυση του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διαρμονική εξίσωση είναι οι **Εσωτερικής Ποινής Ασυνεχείς Galerkin Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων της** hp **- Εκδοχής** (hp **- Version Interior Penalty Discontinuous Galerkin Finite Element Methods**) που περιγράφονται στο [17].

Τώρα, οι **Εσωτερικής Ποινής Ασυνεχείς Μέθοδοι Galerkin Πεπερασμένων Στοιχείων της** hp **- Εκδοχής** (hp **- Version Interior Penalty Discontinuous Galerkin Finite Element Methods**) για τη διαρμονική εξίσωση, που περιλαμβάνουν όρους εσωτερικής ποινής (interior penalty) για να ποινικοποιήσουν τα άλματα κατά μήκος των κοινών εδρών των στοιχείων (στην αριθμητική επίλυση), εμφανίζονται να έχουν πλεονέκτημα συγκρινόμενες με τις **Προσαρμοσμένες Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων** (**Conforming Finite Element Methods**), επειδή μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς πολυωνυμικούς βαθμούς πάνω σε κάθε στοιχείο χωρίς να ενδιαφέρονται για τις απαιτήσεις της συνέχειας εντός του πλέγματος. Ωστόσο, η παραπάνω μέθοδος των Suli- Mozolevski που αναπτύσσεται στο [17] για τη διαρμονική εξίσωση μειονεκτεί, γιατί έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

Οι **Συνεχείς Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής** της hp **- Εκδοχής** για τη διαρμονική εξίσωση χρησιμοποιώντας μη – προσαρμοσμένα (non – conforming) στοιχεία, που αναπτύσσονται στο κεφάλαιο 5 αυτής της διπλωματικής εργασίας, είναι ασθενώς C^1 (λόγω της εσωτερικής ποινής) και ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας δε μεταβάλλεται, δηλαδή παραμένει σταθερός.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι το διαρμονικό πρόβλημα διατυπώθηκε το 19^{ο} αιώνα όταν έγιναν τα πρώτα βήματα στις θεωρίες της ελαστικής παραμόρφωσης και της ιξώδους κίνησης ρευστών.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΟΠΩΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ, ΟΡΙΣΜΟΙ, ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΘΑ ΧΡΕΙΑΣΤΟΥΝ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5, ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ.

(1.2.2) Ορισμός. *Για ένα δοσμένο χωρίο Ω, το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ορίζεται ως*

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{ f \ : \ f \in L^1(K) \quad \forall K \ \text{συμπαγές} \subset \operatorname{int}\Omega \},$$

όπου
$$\operatorname{int}\Omega := \{x \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 \ \text{τέτοιο ώστε} \quad B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega\}.$$

ΧΩΡΟΙ SOBOLEV

(1.3.1) Ορισμός. *Έστω k ένας μη αρνητικός ακέραιος και έστω $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι η ασθενής παράγωγος τάξης $|a|$, $D^a f$, υπάρχει για όλα τα $|a| \le k$ και επίσης υποθέτουμε ότι $p \in [1,\infty]$. Ορίζουμε*

$$W^k_p(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) : \ D^a f \in L^p(\Omega), \ |a| \le k \ \}$$

να είναι ο χώρος Sobolev τάξης k, εφοδιασμένος με την παρακάτω (Sobolev) νόρμα

$$\| f \|_{W^k_p(\Omega)} := \left(\sum_{|a|\le k} \| D^a f \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \qquad \text{όταν} \ \ 1 \le p < \infty$$

και

$$\| f \|_{W^k_p(\Omega)} := \sum_{|a|\le k} \| D^a f \|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{όταν} \ \ p = \infty .$$

Ορίζουμε επίσης τις ημι–νόρμες:

$$| f |_{W^k_p(\Omega)} := \left(\sum_{|a|= k} \| D^a f \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} ,$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\| f \|_{W^k_p(\Omega)} := \left(\sum_{j=0}^{k} | f |^p_{W^j_p(\Omega)} \right)^{1/p} \qquad \text{όταν} \ \ 1 \le p < \infty .$$

Επίσης έχουμε,

$$| f |_{W_p^k(\Omega)} := \sum_{|a|=k} \| D^a f \|_{L^\infty(\Omega)} \quad ,$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\| f \|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{j=0}^{k} | f |_{W_\infty^j(\Omega)} \qquad \text{όταν} \quad p = \infty .$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Όταν $k \geq 1$, η $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ λέγεται ημι-νόρμα Sobolev πάνω στο χώρο $W_p^k(\Omega)$.

Πράγματι, όταν $k \geq 1$, η $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ είναι μόνο μία ημι-νόρμα παρά μία νόρμα, επειδή αν $| f |_{W_p^k(\Omega)} = 0$ για $f \in W_p^k(\Omega)$ δεν προκύπτει απαραίτητα ότι $f(x) = 0$ για σχεδόν κάθε x στο Ω (μονάχα είναι γνωστό ότι $D^a f(x) = 0$ για σχεδόν κάθε $x \in \Omega$, $| a |= k$), έτσι η $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ δεν ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα της νόρμας.

Μία σημαντική ειδική περίπτωση αντιστοιχεί όταν πάρουμε το $p = 2$, τότε ο χώρος $W_2^k(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{W_2^k(\Omega)} := \sum_{|a| \leq k} (D^a f, D^a g) .$$

Για αυτό το λόγο θα γράφουμε $H^k(\Omega)$ αντί του $W_2^k(\Omega)$. Παρακάτω δίνουμε τους ορισμούς της νόρμας και της ημι-νόρμας των χώρων Hilbert-Sobolev $H^1(\Omega)$ και $H^2(\Omega)$.

$$H^1(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) : D^a f \in L^2(\Omega) , \ | a | \leq 1 \}$$

με νόρμα

$$\| f \|_{H^1(\Omega)} = \left(\| f \|_{L^2(\Omega)}^2 + | f |_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

και ημι-νόρμα

$$| f |_{H^1(\Omega)} = \| \nabla f \|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} .$$

$$H^2(\Omega)=\{f\in L^2(\Omega):D^a f\in L^2(\Omega)\,,\,|a|\le 2\}$$

με νόρμα

$$\|f\|_{H^2(\Omega)}=\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+|f|^2_{H^1(\Omega)}+|f|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

και ημι-νόρμες

$$|f|_{H^1(\Omega)}=\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

και

$$|f|_{H^2(\Omega)}=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Σημείωση 1: Η ημι – νόρμα $|f|_{H^2(\Omega)}=\|\Delta f\|_{L^2(\Omega)}$ μόνο όταν $f=0$ στο $\partial\Omega$.

(1.1.1) Ανισότητα Minkowski. *Για* $1\le p\le\infty$ *και* $f,g\in L^p(\Omega)$, *έχουμε ότι*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)}\le\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}\ .$$

(1.1.2) Ανισότητα Holder. *Για* $1\le p,q\le\infty$ *έτσι ώστε* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, *αν* $f\in L^P(\Omega)$ *και* $g\in L^P(\Omega)$, *τότε* $fg\in L^1(\Omega)$ *και*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)}\le\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}\ .$$

(1.1.3) Ανισότητα Cauchy-Schwarz. *Αυτή είναι απλά ανισότητα Holder στην ειδική περίπτωση* $p=q=2$, *δηλαδή αν* $f,g\in L^2(\Omega)$ *τότε* $fg\in L^1(\Omega)$ *και*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)}=\int_\Omega|f(x)g(x)|\,dx\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

(1.4.2) Ανισότητα Ίχνους. (Trace Inequality) *Για ένα πεπερασμένο στοιχείο K κανονικού σχήματος (shape regular) υπάρχει μία σταθερά $C<\infty$ έτσι ώστε*

(1.4.3) $$\| u \|^2_{L^2(\partial K)} \le C\left(h_K^{-1} \| u \|^2_{L^2(K)} + \| u \|_{L^2(K)} \cdot \| \nabla u \|_{L^2(K)} \right).$$

(1.5.3) Διακριτή Ανισότητα Cauchy-Schwarz. *Αυτή είναι απλά διακριτή ανισότητα Holder στην ειδική περίπτωση $p=q=2$ όπου $a_1,a_2,...,a_k,b_1,b_2,...,b_k$ είναι $2k$ πραγματικοί αριθμοί τότε*

(1.5.4) $$\sum_{i=1}^{k} | a_i b_i | \le \left(\sum_{i=1}^{k} | a_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} | b_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.5.5) Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου. *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει*

(1.5.6) $$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

(1.5.7) Ανισότητα. *Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και p ισχύει*

(1.5.8) $$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

(1.5.9) Ανισότητα Αντιστρεψιμότητας. (Inverse Inequality) *Έστω υ ένα πολυώνυμο βαθμού p στο πεπερασμένο στοιχείο K και έστω e μία πλευρά του K με μήκος h. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C<\infty$ έτσι ώστε*

(1.5.10) $$\| \upsilon \|^2_{L^2(e)} \le C \frac{p^2}{h} \| \upsilon \|^2_{L^2(K)}.$$

Κατόπιν, αναφέρουμε κάποια εργαλεία (ορισμοί – ιδιότητες) της συναρτησιακής ανάλυσης που απαιτούνται για την ανάπτυξη της μεταβολικής διατύπωσης (ασθενής διατύπωση, προσεγγιστική διατύπωση) των διαφορικών εξισώσεων.

(2.1.1) Ορισμός. *Μία* **διγραμμική μορφή** (**bilinear form**), $b(\cdot,\cdot)$, *πάνω σε ένα γραμμικό χώρο V είναι μία απεικόνιση* $b: V \times V \to \mathbb{R}$ *έτσι ώστε κάθε μία των μεταβλητών να είναι μία γραμμική μορφή* (*linear form*) *πάνω στον V.*
Δηλαδή $b(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \upsilon) = \lambda_1 b(u_1, \upsilon) + \lambda_2 b(u_2, \upsilon)$ *και*
$b(u, \mu_1 \upsilon_1 + \mu_2 \upsilon_2) = \mu_1 b(u, \upsilon_1) + \mu_2 b(u, \upsilon_2)$ $\forall u_1, u_2, u, \upsilon, \upsilon_1, \upsilon_2 \in V$ *και*
$\forall \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Η **διγραμμική μορφή** *είναι* **συμμετρική** *αν* $b(u,\upsilon) = b(\upsilon,u)$ *για όλα τα* $u, \upsilon \in V$.
Ένα (*πραγματικό*) **εσωτερικό γινόμενο**, *συμβολίζεται* $(\cdot,\cdot)$, *είναι μία* **συμμετρική διγραμμική μορφή** *πάνω στον γραμμικό χώρο V το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*:

(a) $(\upsilon,\upsilon) \geq 0 \quad \forall \upsilon \in V$ *και*
(b) $(\upsilon,\upsilon) = 0 \Leftrightarrow \upsilon = 0$.

(2.1.2) Ορισμός. *Ένας γραμμικός χώρος V μαζί με ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται πάνω σε αυτόν λέγεται* **χώρος εσωτερικού γινομένου** *και συμβολίζεται ως* $(V,(\cdot,\cdot))$.

(2.1.5) Πρόταση. *Η σχέση* $\| u \| := \sqrt{(u,u)}$ *ορίζει μία νόρμα στον χώρο εσωτερικού γινομένου* $(V,(\cdot,\cdot))$.

Η πρόταση (2.1.5) λέει ότι για δοσμένο χώρο εσωτερικού γινομένου $(V,(\cdot,\cdot))$, υπάρχει μία νόρμα που σχετίζεται με τον *V*, είναι ορισμένη πάνω στον *V* και συμβολίζεται ως $\| u \| := \sqrt{(u,u)}$.
Έτσι, ένας χώρος εσωτερικού γινομένου μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό χώρο με νόρμα.

(2.2.1) Ορισμός. *Έστω* $(V,(\cdot,\cdot))$ *είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Αν ο γραμμικός χώρος με νόρμα* $(V, \|\cdot\|)$ *είναι πλήρης, τότε ο* $(V,(\cdot,\cdot))$ *λέγεται* **χώρος Hilbert**.

<u>Παρατήρηση 1</u>: Ένας χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

(2.2.3) Ορισμός. *Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και* $S \subset H$ *είναι ένα γραμμικό υποσύνολο* (*S γραμμικό σημαίνει ότι* $u, \upsilon \in S$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow u + a\upsilon \in S$) *το οποίο είναι κλειστό στον H. Τότε το S λέγεται* **κλειστός υπόχωρος** *του H.*

(2.2.4) Πρόταση. *Αν S είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H, τότε ο* $(S,(\cdot,\cdot))$ *είναι επίσης χώρος Hilbert.*

2.5 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΟΥ (ΑΣΘΕΝΟΥΣ) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ο σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε τη θεωρία χώρων Hilbert, η οποία αναφέρεται παραπάνω, για να πάρουμε αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας για τη μεταβολική διατύπωση των συνοριακού προβλήματος τιμών.

(2.5.1) Ορισμός. *Μία διγραμμική μορφή* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *πάνω σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα H λέγεται ότι είναι* **φραγμένη** (*ή* **συνεχής**) *αν* $\exists C_1 < \infty$ *έτσι ώστε*

$$|\alpha(u,\upsilon)| \leq C_1 \| u \|_H \| \upsilon \|_H \quad \forall u,\upsilon \in H$$

και **coercive** *πάνω στο* $V \subset H$ αν $\exists C_2 > 0$ *έτσι ώστε*

$$\alpha(\upsilon,\upsilon) \geq C_2 \| \upsilon \|_H^2 \quad \forall \upsilon \in V .$$

(2.5.2) Πρόταση. *Έστω ότι ο H είναι χώρος Hilbert και υποθέτουμε ότι* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *είναι μία συμμετρική διγραμμική μορφή η οποία είναι συνεχής πάνω στο H και coercive πάνω σε ένα υπόχωρο V του H. Τότε ο* $(V,\alpha(\cdot,\cdot))$ *είναι ένας χώρος Hilbert.*

Γενικότερα, ένα συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα τίθεται όπως ακολουθεί. Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες τρεις συνθήκες είναι έγκυρες:

(1) $(H,\ (\cdot,\cdot))$ είναι ένας χώρος Hilbert.
(2.5.3) (2) *V* είναι ένας (κλειστός) υπόχωρος του H.
(3) $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι μία φραγμένη, συμμετρική διγραμμική μορφή η οποία είναι coercive πάνω στο *V*.

Τότε το **συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

(2.5.4) Για δοσμένο $F \in V'$, βρείτε $u \in V$ έτσι ώστε $\alpha(u,\upsilon) = F(\upsilon) \quad \forall \upsilon \in V$.

(2.5.5) Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (1) *έως και* (3) *της* (2.5.3) *ισχύουν. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό* $u \in V$ *που λύνει το* (2.5.4).

Το (**Ritz-Galerkin**) **Προσεγγιστικό Πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

Για ένα δοσμένο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης $V_h \subset V$ και για δοσμένο $F \in V'$, βρείτε $u_h \in V_h$ έτσι ώστε

(2.5.6) $\alpha(u_h, \upsilon) = F(\upsilon) \quad \forall \upsilon \in V_h$.

(2.5.7) Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (1) *έως και* (3) *της* (2.5.3) *ισχύουν. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό* $u_h \in V_h$ *που λύνει το* (2.5.6).

Οι εκτιμήσεις σφάλματος για το $u - u_h$ (που ακολουθούν στα επόμενα κεφάλαια) είναι μία συνέπεια της παρακάτω σχέσης.

(2.5.8) Πρόταση. (Galerkin Orthogonality) *Έστω* u *και* u_h *είναι λύσεις του* (2.5.4) *και του* (2.5.6) *αντίστοιχα. Τότε*

$$\alpha(u - u_h, \upsilon) = 0 \quad \forall \upsilon \in V_h .$$

2.6 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΟΥ (ΑΣΘΕΝΟΥΣ) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ένα μη συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα τίθεται όπως ακολουθεί. Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες πέντε συνθήκες είναι έγκυρες:

(2.6.1)
(1) $(H, (\cdot,\cdot))$ είναι ένας χώρος Hilbert.
(2) V είναι ένας (κλειστός) υπόχωρος του H.
(3) $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι μία διγραμμική μορφή πάνω στο V, όχι απαραίτητα συμμετρική.
(4) $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχής (φραγμένη) πάνω στο V.
(5) $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι coercive πάνω στο V.

Τότε το **μη συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

(2.6.2) Για δοσμένο $F \in V'$, βρείτε $u \in V$ έτσι ώστε $\alpha(u, \upsilon) = F(\upsilon) \;\; \forall \upsilon \in V$.

Το **(Galerkin) Προσεγγιστικό Πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

Για ένα δοσμένο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης $V_h \subset V$ και για δοσμένο $F \in V'$, βρείτε $u_h \in V_h$ έτσι ώστε

(2.6.3) $\alpha(u_h, \upsilon) = F(\upsilon) \quad \forall \upsilon \in V_h$.

2.7 ΘΕΩΡΗΜΑ LAX - MILGRAM

(2.7.2) Θεώρημα. (Lax-Milgram) *Για ένα δοσμένο χώρο Hilbert* $(V,(\cdot,\cdot))$, *μία συνεχής, coercive διγραμμική μορφή* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *και ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό* $F \in V'$, *υπάρχει ένα μοναδικό* $u \in V$ *έτσι ώστε*

(2.7.3) $\quad \alpha(u,\upsilon) = F(\upsilon) \ \ \forall \upsilon \in V$.

(2.7.4) Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (2.6.1) *ισχύουν. Τότε το μεταβολικό πρόβλημα* (2.6.2) *έχει μοναδική λύση.*

(2.7.5) Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (2.6.1) *ισχύουν. Τότε το προσεγγιστικό πρόβλημα* (2.6.3) *έχει μοναδική λύση.*

2.8 ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Έστω ότι u είναι η λύση του μεταβολικού προβλήματος (2.6.2) και u_h είναι η λύση του προσεγγιστικού προβλήματος (2.6.3). Τώρα, θέλουμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα $\| u - u_h \|_V$. Αυτό το κάνουμε ακολουθώντας το παρακάτω θεώρημα.

(2.8.1) Θεώρημα. (Cea) *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (2.6.1) *ισχύουν και ότι το* u *λύνει το* (2.6.2). *Για το μεταβολικό πρόβλημα πεπερασμένου στοιχείου* (2.6.3) *έχουμε*

(2.8.2) $$\| u - u_h \|_V \le \frac{C_1}{C_2} \inf_{\upsilon \in V_h} \| u - \upsilon \|_V ,$$

όπου C_1 *είναι η σταθερά της συνέχειας* (*continuity*) *και* C_2 *είναι η σταθερά της coercivity της διγραμμικής μορφής* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *πάνω στο V.*

(2.8.3) Θεώρημα. (Θεώρημα Προβολής) *Έστω U χώρος Hilbert και V κλειστός υπόχωρος του U. Για κάθε* $u \in U$ *υπάρχει μοναδικό* $\underline{u} \in V$ *τέτοιο ώστε*

$$(u - \underline{u}, \upsilon) = 0, \quad \forall \upsilon \in V.$$

Επιπλέον το $\underline{u}$ *ικανοποιεί τη σχέση*: $\| u - \underline{u} \| = \min_{\upsilon \in V} \| u - \upsilon \|$.
Το $\underline{u}$ *καλείται* **προβολή** *του* u *στο V ή* **βέλτιστη προσέγγιση** *του* u *στο V.*

<u>Σημείωση 1</u>: Αν η διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συμμετρική τότε η λύση u_h του προσεγγιστικού προβλήματος ταυτίζεται με τη βέλτιστη προσέγγιση $\underline{u}$. Δηλαδή

$$\| u - u_h \| = \| u - \underline{u} \| \text{ , αλλιώς } \| u - \underline{u} \| \leq \| u - u_h \| .$$

Για να προσεγγίσουμε τη λύση ενός μεταβολικού προβλήματος (variational problem),

$$\alpha(u,\upsilon) = F(\upsilon) \quad \forall\, \upsilon \in V\,,$$

χρειαζόμαστε να κατασκευάσουμε υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης $S \subset V$.

3.1 ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Ακολουθεί ο ορισμός ενός πεπερασμένου στοιχείου, όπως διατυπώθηκε από τον Ciarlet το 1978.

(3.1.1) Ορισμός. Έστω

(i) *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ένα χωρίο με κατά τμήματα λείο σύνορο (το* ***χωρίο του στοιχείου****)*

(ii) ***P*** *είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος συναρτήσεων στο K (οι* ***συναρτήσεις σχήματος)***

(iii) ***N*** **=** $\{ N_1, N_2, \dots, N_k \}$ *είναι μια βάση για το* ***P΄*** *(οι* **nodal μεταβλητές**)

Τότε το (*K*, ***P***, ***N***) ονομάζεται **πεπερασμένο στοιχείο** .

(3.3.7) Ορισμός. *Μία υποδιαίρεση ενός χωρίου* Ω είναι *μία πεπερασμένη συλλογή ανοικτών συνόλων* $\{K_i\}$ *έτσι ώστε*:

(i) $K_i \cap K_j = \varnothing$ *αν* i ≠ j *και*

(ii) $\bigcup \overline{K}_i = \overline{\Omega}$.

(3.3.10) Ορισμός. *Μία* **τριγωνοποίηση** *ενός πολυγωνικού χωρίου Ω είναι μία υποδιαίρεση η οποία αποτελείται από τρίγωνα, ικανοποιεί τον ορισμό* (3.3.7), *έχοντας την ιδιότητα ότι*:

καμία κορυφή ενός οποιουδήποτε τριγώνου δεν είναι εσωτερικό σημείο μίας πλευράς ενός άλλου τριγώνου.

Στο κεφάλαιο 6 εφαρμόζουμε τις Συνεχείς Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής για τη διαρμονική εξίσωση στη μία διάσταση ($1D$). Θεωρούμε ότι ο χώρος πεπερασμένου στοιχείου V_h (όπως ορίζεται στην παράγραφο 5.1) αποτελείται από τα πολυώνυμα Lagrange δευτέρου βαθμού. Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα (πίνακας ακαμψίας) του γραμμικού συστήματος $Ac = b$ και η επίλυση του για αυτή τη μέθοδο

Θεωρούμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών για τη διαρμονική εξίσωση στη μία διάσταση

$$(6.1.1)\qquad \begin{aligned} &u^{(4)} = f, \quad x \in [0,1] \\ &u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{aligned}$$

και την ακολουθία $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ από $n+1$ ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[0,1]$ με $x_i = ih$ και $h = \frac{1}{n}$.

(Επιλέγοντας ότι $f(x) = x$ στο διάστημα $[0,1]$ και χρησιμοποιώντας το αόριστο ολοκλήρωμα, η ισχυρή λύση είναι

$$u(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{40} + \frac{x^2}{60},\ x \in [0,1]\ ).$$

Τα πολυώνυμα Lagrange δευτέρου βαθμού δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le x_{i-1} \\ \dfrac{x^2 - (x'_{i-1} + x_{i-1})x + x'_{i-1}x_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}, \quad x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x^2 - (x'_i + x_{i+1})x + x'_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{2}}, \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, \quad x \ge x_{i+1} \end{cases}$$

$$\psi_k(x)=\begin{cases}0, & x\le x_i\\ -\dfrac{x^2-(x_i+x_{i+1})x+x_ix_{i+1}}{\dfrac{h^2}{4}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0, & x\ge x_{i+1}\end{cases}$$

$$\phi_{k+1}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_i\\ \dfrac{x^2-(x_i'+x_i)x+x_i'x_i}{\dfrac{h^2}{2}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\ \dfrac{x^2-(x_{i+1}'+x_{i+2})x+x_{i+1}'x_{i+2}}{\dfrac{h^2}{2}}, & x_{i+1}\le x\le x_{i+2}\\ 0, & x\ge x_{i+2}\end{cases}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η βάση για το χώρο πεπερασμένου στοιχείου V_h είναι το σύνολο $\{\phi_0^+,\psi_0,\phi_1^-,\phi_1^+,...,\phi_{n-1}^+,\psi_{n-1},\phi_n^-\}=\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_{3n-2},\phi_{3n-1},\phi_{3n}\}$ με $\phi_1(x)\neq 0$ και $\phi_{3n}(x)\neq 0 \quad \forall x\in[0,1]$.

Τώρα, θεωρούμε ότι το πεπερασμένο στοιχείο K_i είναι αυτό που βρίσκεται στο φορέα $[x_{i-1},x_i]$ και το K_{i+1} αυτό που βρίσκεται στο φορέα $[x_i,x_{i+1}]$.
Θα λύσουμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών (6.1.1) με τον τρόπο που περιγράφεται στις παραγράφους 5.2 και 5.3.

Τότε, η «σπασμένη» ασθενής διατύπωση του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διαρμονική εξίσωση είναι ακολούθως:

βρείτε $u\in H^3([0,1],T_h)$ έτσι ώστε

(6.1.12) $$\alpha(u,\upsilon)=l(\upsilon)\quad \forall\,\upsilon\in H^3([0,1],T_h)$$

με τη διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι

$$\alpha(u,\upsilon)=\int_0^1 u''(x)\cdot\upsilon''(x)dx-\sum_{i=0}^{n}\langle u''(x_i)\rangle\cdot[\upsilon'(x_i)]-\sum_{i=0}^{n}\langle \upsilon''(x_i)\rangle\cdot[u'(x_i)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\langle u'''(x_i)\rangle\cdot[\upsilon(x_i)]+\sum_{i=0}^{n}\langle \upsilon'''(x_i)\rangle\cdot[u(x_i)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\alpha_{x_i}\cdot[u(x_i)]\cdot[\upsilon(x_i)]+\sum_{i=0}^{n}\beta_{x_i}\cdot[u'(x_i)]\cdot[\upsilon'(x_i)]$$

και

$$l(\upsilon)=\int_0^1 f(x)\cdot\upsilon(x)dx.$$

Τότε το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι

βρείτε $u_h \in V_h$ έτσι ώστε

(6.1.13) $$\alpha(u_h,\upsilon)=l(\upsilon) \quad \forall\,\upsilon\in V_h$$

με τη διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι

$$\alpha(u_h,\upsilon)=\int_0^1 u_h''(x)\cdot\upsilon''(x)dx-\sum_{i=0}^{n}\langle u_h''(x_i)\rangle\cdot[\upsilon'(x_i)]-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\langle \upsilon''(x_i)\rangle\cdot[u_h'(x_i)]+\sum_{i=0}^{n}\beta_{x_i}\cdot[u_h'(x_i)]\cdot[\upsilon'(x_i)]$$

και

$$l(\upsilon)=\int_0^1 f(x)\cdot\upsilon(x)dx.$$

Τα στοιχεία του πίνακα θα δίνονται από τη διγραμμική μορφή $\alpha(u_h,\upsilon)$, με τη λύση u_h να δίνεται από τη σχέση $u_h=\sum_{k=1}^{3n}c_k\phi_k$.
Επομένως η σχέση (6.1.13) γίνεται

(6.1.14) $$\alpha(\sum_{k=1}^{3n}c_k\phi_k,\phi_j)=l(\phi_j) \quad \forall\phi_j\in V_h \quad j=1,\ldots,3n.$$

Τότε $$\sum_{k=1}^{3n}c_k\cdot\alpha(\phi_k,\phi_j)=l(\phi_j) \quad \forall\phi_j\in V_h \quad j=1,\ldots,3n.$$

Άρα καταλήξαμε σε ένα σύστημα της μορφής $Ac = b$ με $A = [\alpha_{jk}]_{3n\times 3n}$ όπου

$$\begin{aligned}\alpha_{jk} = \alpha(\phi_k, \phi_j) = \int_0^1 \phi_k''(x)\cdot\phi_j''(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \left\langle \phi_k''(x_i)\right\rangle \cdot \left[\phi_j'(x_i)\right] \\ -\sum_{i=0}^{n} \left\langle \phi_j''(x_i)\right\rangle \cdot \left[\phi_k'(x_i)\right] + \sum_{i=0}^{n} \beta_{x_i}\cdot\left[\phi_k'(x_i)\right]\cdot\left[\phi_j'(x_i)\right].\end{aligned} \qquad \forall j,k = 1,\dots,3n .$$

και

$$b = \left[b_j\right]_{3n\times 1} = l(\phi_j).$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Ο πίνακας $A = [\alpha_{jk}]_{3n\times 3n}$ είναι συμμετρικός, επειδή η διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συμμετρική όπως αναφέρεται στην Παρατήρηση 2 της παραγράφου 5.2.

<u>Παρατήρηση 2</u>: Το βήμα h είναι ομοιόμορφο, οπότε θεωρούμε ότι
$\beta_{x_i} = \dfrac{p^2}{h} = \dfrac{4}{h} \quad \forall i = 0,\dots,n$.

Επομένως ο $A = [\alpha_{jk}]_{3n\times 3n}$ είναι ένας πενταδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{84}{h^3} & -\frac{148}{h^3} & \frac{84}{h^3} & 0 & . & . & . & . & . & 0\\
-\frac{148}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{96}{h^3} & & & & & & .\\
\frac{84}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{96}{h^3} & & & & & .\\
0 & \frac{96}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{96}{h^3} & & & & .\\
. & & . & . & . & . & . & & & .\\
. & & & . & . & . & . & . & & .\\
. & & & & . & . & . & . & \frac{96}{h^3} & 0\\
. & & & & & \frac{96}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{52}{h^3}\\
. & & & & & & \frac{96}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{68}{h^3}\\
0 & . & . & . & . & . & 0 & \frac{52}{h^3} & -\frac{68}{h^3} & \frac{36}{h^3}
\end{pmatrix}_{3n\times 3n}$$

.

και το διάνυσμα των σταθερών όρων b έχει την παρακάτω μορφή

$$b=h^2\begin{pmatrix}
0\\
\frac{2i+1}{3}\\
\frac{i}{6}\\
\frac{i}{6}\\
.\\
.\\
.\\
\frac{2i+1}{3}\\
\frac{n}{6}
\end{pmatrix}.$$

Λύνοντας το σύστημα $Ac=b$ προκύπτει η προσεγγιστική λύση u_h (για $n=3$)

$$u_h=\sum_{j=1}^{9}c_j\phi_j=\frac{1}{1000}\cdot\left(\begin{array}{l}
-0,269\dfrac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{3})}{(\frac{1}{3})^2}+0.2616\dfrac{x(x-\frac{1}{3})}{(\frac{1}{3})^2}\\[2ex]
+0.0388\dfrac{x(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{3})^2}+0.0196\dfrac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3})^2}\\[2ex]
+0.1476\dfrac{(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3})^2}+0.0242\dfrac{(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{3})^2}\\[2ex]
+0.321\dfrac{(x-\frac{5}{6})(x-1)}{(\frac{1}{3})^2}-0.9064\dfrac{(x-\frac{2}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3})^2}\\[2ex]
+0.5068\dfrac{(x-\frac{5}{6})(x-\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3})^2}
\end{array}\right)$$

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ την κυρία **Λαμπροπούλου Σοφία**, **Αν. Καθηγήτρια του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου** και τον κύριο **Γεωργούλη Μανώλη, Λέκτορα του Τομέα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Λέστερ** για τη συνεχή και πολύτιμη βοήθεια τους, ώστε αυτή η διπλωματική εργασία να έχει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.